



4. Ossakow S. L., Zalesak S. T., McDonald B. E., Chaturvedi P. K. Nonlinear equatorial spread-F: Dependence of altitude of the F-peak and bottomside background electron density gradient scale length // J. Geophys. Res. 1979. Vol. A84, № 1. P. 17–39.
5. Гершман Б. Н. Динамика ионосферной плазмы. М., 1974.
6. Рыбин В. В., Поляков В. М. Об амбиполярности движений ионосферной плазмы // Ионосферные исследования. 1983. № 33. С. 5–44.
7. Фаткуллин М. Н., Ситнов Ю. С. Диполярная система координат и ее некоторые особенности // Геомагнетизм и аэрномия. 1972. Т. 12, № 2. С. 333–335.
8. Hedin A. E., Salah J. E., Evans J. V. et al. A global thermospheric model based on mass spectrometer and incoherent scatter data MSIS 1. N2 density and temperature // J. Geophys. Res. 1977. Vol. 82, N. A1. P. 2139–2147.
9. Hedin A. E., Reber C. A., Newton G. P. et al. A global thermospheric model based on mass spectrometer and incoherent scatter data MSIS 2. Composition // Ibid. P. 2148–2156.
10. Кащенко Н. М., Мациевский С. В. Математическое моделирование неустойчивостей экваториального F-слоя ионосферы // Вестник Калининградского государственного университета. 2003. Вып. 3. С. 59–68.

Об авторах

Николай Михайлович Кащенко – канд. физ.-мат. наук, доц., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград.

E-mail: kaschtschenko@mail.ru

Сергей Валентинович Мациевский – канд. физ.-мат. наук, доц., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград.

E-mail: matsievsky@newmail.ru

Сергей Александрович Ишанов – д-р физ.-мат. наук, проф., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград.

E-mail: sergey.ishanov@ya.ru

About the authors

Dr Nikolay Kashchenko, ass. prof., I. Kant Baltic Federal University, Kaliningrad.

E-mail: kaschtschenko@mail.ru

Dr Sergey Matsievsky, ass. prof., I. Kant Baltic Federal University, Kaliningrad.

E-mail: matsievsky@newmail.ru

Prof. Sergey Ishanov, I. Kant Baltic Federal University, Kaliningrad.

E-mail: sergey.ishanov@ya.ru

УДК 532.5

А. Я. Шпилевой, В. Н. Худенко, Н. В. Персичкина

ДИНАМИЧЕСКАЯ ВИЗУАЛИЗАЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ОСОБЫХ ТОЧЕК АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В ГИДРОДИНАМИКЕ

Построены динамические визуализации математических моделей потенциальных установившихся течений идеальной несжимаемой жидкости с использованием особых точек аналитических функций.



Dynamic visualizations for mathematic models for potentially stable flows of ideal incompressible liquid have been built using special points of analytic functions.

Ключевые слова: динамическая визуализация, несжимаемая жидкость, особая точка, диполь, квадруполь, сток, источник, точечный вихрь.

Key words: dynamic visualization, incompressible liquid, special point, dipole, quadruple, sink, source, point vortex.

Введение

22

Рассмотрим уравнения потенциальных установившихся течений идеальной несжимаемой жидкости [1; 2].

Интеграл Бернулли – Эйлера

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + u = \text{const}, \quad (1)$$

где v – скорость жидкости; p – гидродинамическое давление; ρ – плотность.

Закон сохранения массы выражается через следующее уравнение неразрывности

$$\text{div} \vec{v} = 0 \quad \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \right), \quad (2)$$

а так как течение жидкости потенциально, то

$$\vec{v} = \nabla \varphi \quad \left(v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right), \quad (3)$$

и, кроме того, выполняется критерий потенциальности

$$\text{rot} \vec{v} = 0 \quad \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) = 0.$$

Введем функцию тока $\psi(x, y)$ следующим образом:

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (4)$$

Подставляя соотношения (4) в (2), получаем тождество, что говорит о справедливости выражений (4). Можно доказать, что вдоль данной линии тока функция ψ постоянна и что линии тока являются траекториями частиц жидкости. Из соотношений (3) и (4) следует

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (5)$$



Выражения (5) представляют собой условия Коши – Римана, следовательно, функция

$$w(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$$

является аналитической функцией комплексного переменного z и называется *комплексным потенциалом* гидродинамического течения.

Если комплексный потенциал известен, то с помощью выражений (3) или (4) можно определить поле скоростей. Поле давлений определяется с помощью интеграла Бернулли – Эйлера (1).

При исследовании течений жидкости удобно использовать эквипотенциали $\varphi(x, y) = c$ и линии тока $\psi(x, y) = c$, которые взаимно перпендикулярны.

Рассмотрим комплексные потенциалы основных гидродинамических течений.

1. Точечный вихрь

Рассмотрим течение с комплексным потенциалом

$$w(z) = -\frac{\Gamma i}{2\pi} \ln(z) \quad (z = re^{i\theta}). \quad (6)$$

Выделяя в (6) действительную и мнимую части, получаем

$$\varphi = \frac{\Gamma}{2\pi} \theta, \quad \psi = -i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r. \quad (7)$$

Из соотношений (7) следует, что $\theta = C$ является семейством эквипотенциалей, а $r = c$ – семейством линий тока. Эквипотенциали – лучи, исходящие из начала координат. Линии тока – концентрические окружности с центром в начале координат.

Найдем поле скоростей в полярной системе координат. Радиальная составляющая скорости

$$v_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0.$$

Трансверсальная составляющая скорости

$$v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \frac{\Gamma}{2\pi r} = v. \quad (8)$$

Частицы жидкости движутся вдоль линий тока. Согласно (8) чем ближе к центру, тем скорость больше. Это течение называется *точечным вихрем*. В пространстве мы имеем вихревую нить, похожую на торнадо или смерч.

Величина Γ в выражении (6) называется *интенсивностью вихря*. Точечный вихрь изображен на рисунке 1.

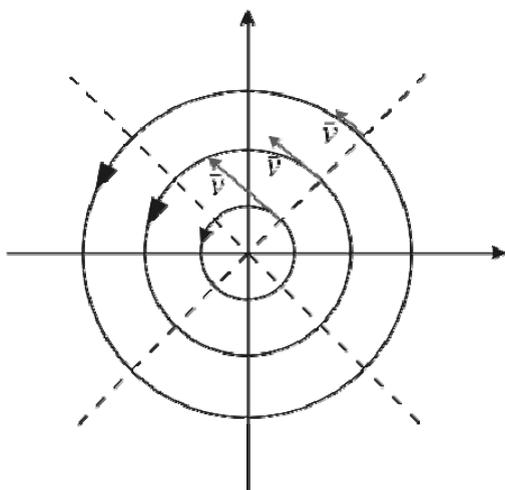


Рис. 1. Точечный вихрь

2. Точечный источник (сток)

Рассмотрим течение с комплексным потенциалом

$$w(z) = \frac{Q}{2\pi} \ln z.$$

При $Q > 0$ имеем точечный источник, при $Q < 0$ — точечный сток. Q называют *мощностью источника*.

Исследования этого течения указаны на рисунках 2 и 3. Комплексный потенциал используется как модель нагнетательной или эксплуатационной нефтяной, газовой или водяной скважины.

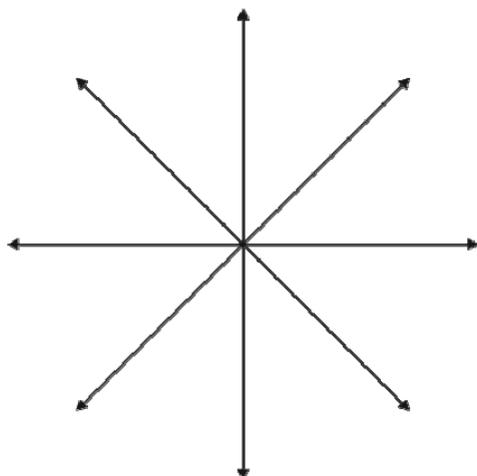


Рис. 2. Точечный источник

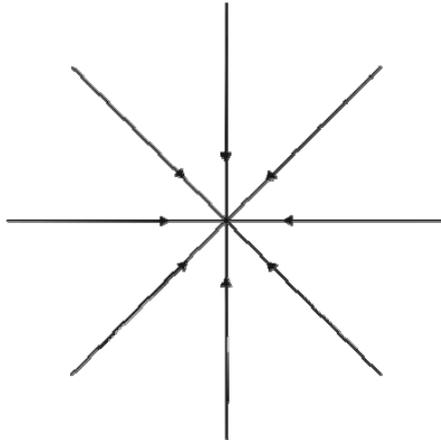


Рис. 3. Точечный сток

3. Диполь

Это течение имеет комплексный потенциал

$$w(z) = -\frac{M}{2\pi} \cdot \frac{1}{z}.$$

Линиями тока являются окружности, касающиеся оси Ox . Жидкость вытекает из начала координат вправо и втекает обратно слева (рис. 4).

Такая модель может быть получена, если источник и сток сближаются вдоль оси Ox к началу координат. Данная модель в гидродинамике является вспомогательной.

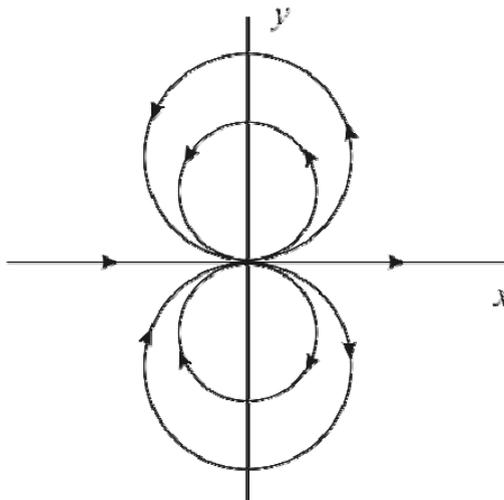


Рис. 4. Диполь



4. Мультиполь порядка n

Это течение описывается комплексным потенциалом

$$w(z) = \frac{C}{z^n}.$$

Линии тока течения при $n = 2$ указаны на рисунке 5.

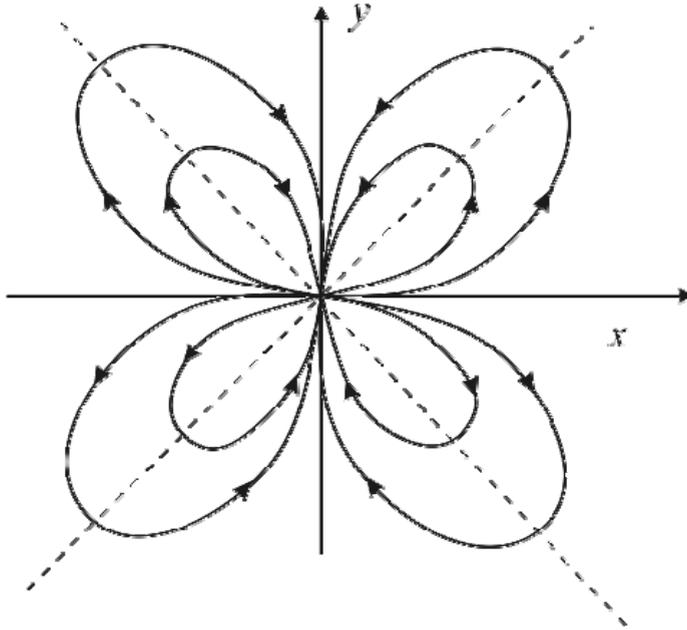


Рис. 5. Линии тока течения при $n = 2$

5. Поступательный поток (диполь в бесконечности)

Рассмотрим течение с комплексным потенциалом

$$w(z) = v_0 z,$$

$$w(z) = v_0 x + i v_0 y.$$

Линии тока $y = c$. Проекция скорости

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = v_0, \quad v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0.$$

Линии тока течения указаны на рисунке 6. Это течение широко используется при моделировании обтекания различных тел (кораблей, самолетов) потоком идеальной жидкости.

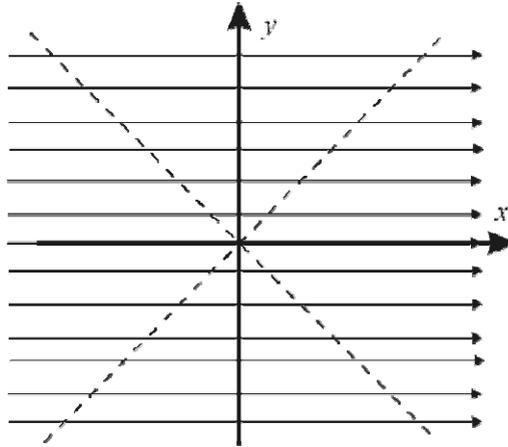


Рис. 6. Поступательный поток

6. Квадруполь в бесконечности

Это течение с комплексным потенциалом

$$w(z) = cz^2.$$

Линии тока этого течения представляют собой гиперболы $xy = c$.

Эту модель можно рассматривать как обтекание потоком непроницаемой стены (рис. 7).

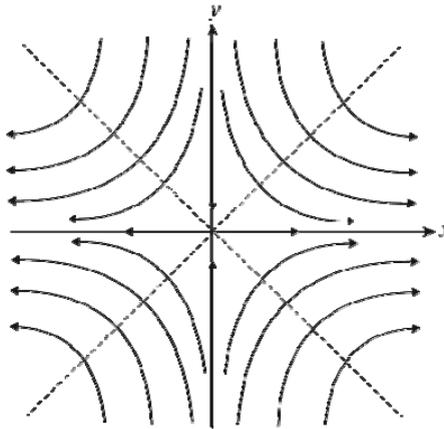


Рис. 7. Модель обтекания потоком непроницаемой стены

7. Мультиполь порядка n в бесконечности

Это течение с комплексным потенциалом

$$w(z) = cz^n,$$

оно аналогично предыдущему в $2n$ -углах.



8. Суперпозиция

Сумма комплексных потенциалов течения определяет комплексный потенциал нового течения

Примеры.

1. Сложение поступательного потока и диполя.

Комплексный потенциал в этом случае равен

$$w(z) = v_0 z + \frac{M}{2\pi} \cdot \frac{1}{z}.$$

28

Это модель обтекания потоком идеальной жидкости непроницаемого круга (рис. 8).

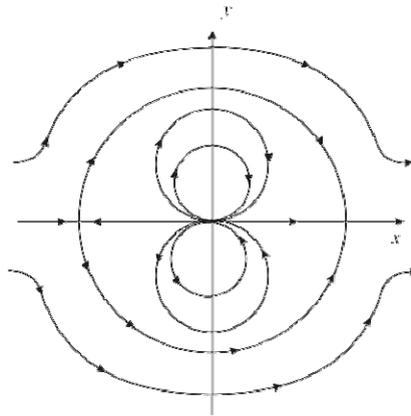


Рис. 8. Модель обтекания потоком идеальной жидкости непроницаемого круга

2. Сложение двух источников.

Сложим комплексные потенциалы двух источников одинаковой мощности. Это течение описывается комплексным потенциалом

$$w(z) = \frac{Q}{2\pi} \ln(z-h) + \frac{Q}{2\pi} \ln(z+h).$$

Эта модель описывает течение источника у непроницаемой стенки (рис. 9).

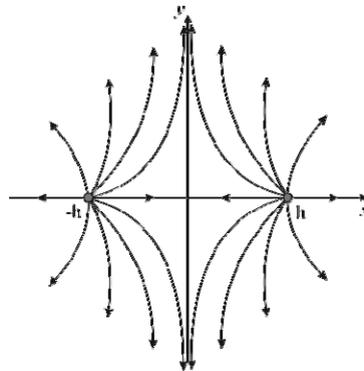


Рис. 9. Модель течения источника у непроницаемой стенки



3. Сложение источника и стока.

Рассмотрим суперпозицию источника и стока одинаковой мощности. Комплексный потенциал в этом случае имеет вид

$$w(z) = \frac{Q}{2\pi} \ln(z+h) - \frac{Q}{2\pi} \ln(z-h).$$

Линии тока этого течения указаны на рисунке 10. Аналогичная картинка имеет место в электростатике для двух разноименных зарядов. Вместо линий тока мы имеем силовые линии.

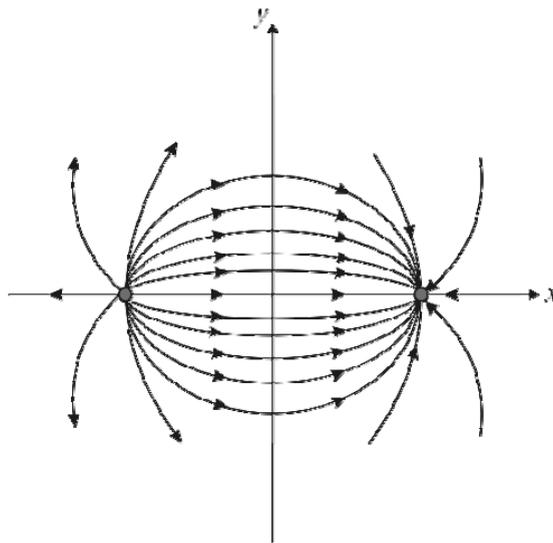


Рис. 10. Суперпозиция источника и стока одинаковой мощности

Как это уже проделано авторами в работе [3], созданы динамические визуализации перечисленных выше моделей. Данная работа проведена в среде Adobe Flash и позволяет более точно и наглядно разобратся с особенностями поведения жидкостей в окрестностях особых точек. Особенно эти динамические визуализации ценны для учебного процесса (спецкурсы, обучение магистрантов и аспирантов). На рисунках 11 – 13 приведены кадры визуализаций.

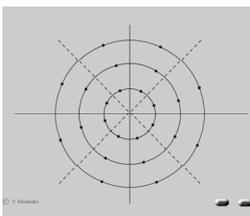


Рис. 11. Точечный вихрь

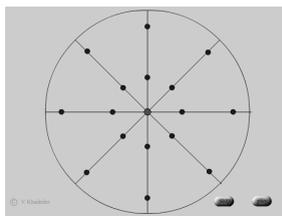


Рис. 12. Точечный сток

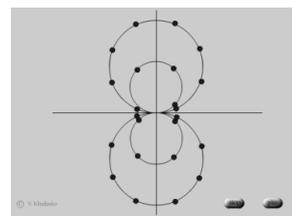


Рис. 13. Диполь



Список литературы

1. Голубева О. В. Курс механики сплошных сред. М., 1972.
2. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М., 1978.
3. Шпилевой А. Я., Худенко В. Н., Персичкина Н. В. К вопросу о пространственной визуализации решения задачи движения волчка по гладкой горизонтальной поверхности // Вестник Балтийского федерального университета им. И. Канта. 2015. Вып. 4. С. 111 – 114.

Об авторах

Алексей Яковлевич Шпилевой — канд. физ.-мат. наук, Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград.

E-mail: ashpilevoi@kantiana.ru

Владимир Николаевич Худенко — канд. физ.-мат. наук, Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград.

E-mail: Vkhudenko@tis-dialog.ru

Наталья Витальевна Персичкина — ст. преп., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград.

E-mail: persichkina@rambler.ru

About the authors

Dr Alexey Shpilevoi, I. Kant Baltic Federal University, Kaliningrad.

E-mail: ashpilevoi@kantiana.ru

Dr Vladimir Khudenko, I. Kant Baltic Federal University, Kaliningrad.

E-mail: VKhudenko@tis-dialog.ru

Natalia Persichkina, head teacher, I. Kant Baltic Federal University, Kaliningrad.

E-mail: persichkina@rambler.ru

УДК 510, 372.851

С. В. Мациевский

ОБ УЧЕБНОМ КУРСЕ

«ВВЕДЕНИЕ В СПЕЦИАЛЬНОСТЬ ПО МАТЕМАТИКЕ»

Представлена авторская программа математического курса введения в специальность. Программа состоит из четырех разделов: формальная логическая система и функции, числовая система и системы счисления, искусственный интеллект и нечеткие операторы, парадигмы программирования: процедурное, логическое и функциональное.

Author's program of a mathematical course of introduction to specialty is submitted. The program consists of four sections: formal logical system and functions, numerical system and number systems, artificial intelligence and fuzzy operators, programming paradigms: procedural, logical and functional.

Ключевые слова: математическое моделирование, транспортные потоки, учебная программа.

Key words: mathematical modeling, transport flows, training program.